# Kreisbestimmung aus 3 Punkten der Kreislinie

Kreisgleichung: $(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$

Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (x_1-x_m)^2 + (y_1-y_m)^2 &= r^2 && (a) \\ && \wedge \\ (x_2-x_m)^2 + (y_2-y_m)^2 &= r^2 && (b) \\ && \wedge \\ (x_3-x_m)^2 + (y_3-y_m)^2 &= r^2 && (c) \end{aligned}$$

(a) = (b)
$$x_1^2 + \cancel{x_m^2} - 2x_1x_m + y_1^2 + \cancel{y_m^2} - 2y_1y_m$$
$$= x_2^2 + \cancel{x_m^2} - 2x_2x_m + y_2^2 + \cancel{y_m^2} - 2y_2y_m$$

$\Leftrightarrow$
$$2x_2x_m - 2x_1x_m = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 - 2y_m(y_2-y_1)$$

$\Leftrightarrow$ (1)
$$\boxed{x_m = \frac{(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)-2y_m(y_2-y_1)}{2(x_2-x_1)}}$$

(a) = (c) ergibt analog

(2)
$$\boxed{x_m = \frac{(x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)-2y_m(y_3-y_1)}{2(x_3-x_1)}}$$

(1) = (2)
$$\frac{\cancel{2}y_m(y_3-y_1)}{\cancel{2}(x_3-x_1)} - \frac{2y_m(y_2-y_1)}{\cancel{2}(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{(x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)}{2(x_3-x_1)} - \frac{(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)}{2(x_2-x_1)}$$

$\Leftrightarrow$
$$y_m = \frac{\dfrac{(x_3^2-x_1^2)+(y_3^2-y_1^2)}{2(x_3-x_1)} - \dfrac{(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)}{2(x_2-x_1)}}{\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y_m = \frac{(x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2)(x_2 - x_1) - (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)(x_3 - x_1)}{2[(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)]}} \quad (3)$$

in (1) od. (2)

außerdem: $\boxed{r = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2}}$ (4)

Sonderfälle: (vereinfachend)

$y_3 = y_1 \Rightarrow x_m = \frac{x_1 + x_3}{2}$

$x_2 = x_1 \Rightarrow y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$

⋮ andere Indizes analog

Sonderfälle: (extra-Betrachtung nötig!)

3 Punkte auf einer Grade:

$y_1 = y_2 = y_3 \Rightarrow$ Senkrechte

$x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow$ Waagerechte

$\Uparrow$ $(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \Rightarrow$ sonst. Gerade

(2 Punkte identisch: $P_1 = P_2$, $P_1 = P_3$, $P_2 = P_3$)